Mathématiques 1

PSI **2020**

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures — Calculatrice autorisée

Objectif

L'objectif de ce sujet est l'étude de la gestion des erreurs dans un processus industriel.

On considère un processus industriel automatisé au cours duquel une tâche répétitive est effectuée à chaque instant $n \in \mathbb{N}^*$. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs susceptibles de se produire à l'instant n. On admet que le système parvient à corriger ces erreurs et à maintenir son fonctionnement si le nombre total d'erreurs enregistrées jusqu'à l'instant n, noté $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, reste inférieur à une quantité de la forme amn, où $a > 1$ est une constante fixée et m est le nombre moyen d'erreurs enregistrées à chaque instant. On est donc amené à estimer une probabilité de la forme $P(S_n > nam)$, dans le but de montrer qu'elle tend vers 0 très rapidement lorsque n tend vers l'infini.

Dans la première partie, on étudie le cas particulier où les variables aléatoires X_n sont mutuellement indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre $1/2$. Dans la deuxième partie, on démontre partiellement le théorème de Perron-Frobenius, qui permet, dans la troisième partie, d'étudier le cas où les variables aléatoires X_n forment une chaîne de Markov, c'est-à-dire où le nombre d'erreurs enregistrées à l'instant $n+1$ dépend uniquement de celui enregistré à l'instant n.

I Cas de la loi de Poisson

Dans cette partie, on étudie le modèle élémentaire où la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ du nombre d'erreurs aux instants successifs est une suite de variables aléatoires identiquement distribuées, mutuellement indépendantes, et suivant une loi de Poisson de paramètre $1/2$.

L'objectif de cette partie est de donner un équivalent de $P(S_n > n)$ lorsque n tend vers $+\infty$, afin de s'assurer que celle-ci converge vers 0 avec une vitesse de convergence exponentielle.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et G_{X_n} la fonction génératrice de X_n.

I.A – Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Q 1. Montrer que S_n et X_{n+1} sont indépendantes.

Q 2. Expliciter le calcul de la fonction génératrice G_{X_1} de la variable aléatoire X_1.

Q 3. Justifier que $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_{S_n}(t) = \left(G_{X_1}(t)\right)^n$.

Q 4. Montrer que la variable aléatoire S_n suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

I.B –

Q 5. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n!\left(\frac{2}{n}\right)^n P(S_n > n) = \mathrm{e}^{-n/2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n!\,n^k}{(n+k)!}\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Q 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(\frac{n}{n+k}\right)^k \leqslant \frac{n!\,n^k}{(n+k)!} \leqslant 1.$$

Q 7. Montrer que la série de fonctions $\sum u_k$ où pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_k est définie sur $[0,+\infty[$ par $u_k : x \mapsto (1+kx)^{-k}\,(1/2)^k$ est normalement convergente sur $[0,+\infty[$.

Q 8. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k \geqslant 1} \left(1+\frac{k}{n}\right)^{-k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ converge et que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{k}{n}\right)^{-k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1.$$

Q 9. En déduire que, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$P(S_n > n) \sim \frac{\mathrm{e}^{-n/2}}{n!}\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

Q 10. En déduire, à l'aide de la formule de Stirling, qu'il existe un réel $\alpha \in \left]0,1\right[$ tel que $P(S_n > n) = O(\alpha^n)$.

II Quelques résultats sur les matrices

L'objectif de cette partie est de démontrer un certain nombre de résultats d'algèbre linéaire qui serviront dans la partie suivante.

Notations

— n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

— Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathrm{sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres *complexes* de A et pour $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$, $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n)$. On note $\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{sp}(A)\}$.

— On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *positive* si tous ses coefficients sont positifs. On note alors $A \geqslant 0$.

— On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *strictement positive* si tous ses coefficients sont strictement positifs. On note alors $A > 0$.

— Un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ est dit *positif* si tous ses coefficients sont positifs. On note alors $x \geqslant 0$.

— Un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ est dit *strictement positif* si tous ses coefficients sont strictement positifs. On note alors $x > 0$.

— On définit une relation d'ordre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $A \geqslant B$ si $A - B \geqslant 0$.

— On définit une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^n$ par $x \geqslant y$ si $x - y \geqslant 0$.

— Si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $|A|$ désigne la matrice $|A| = (|a_{i,j}|)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

— Si $x = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{C}^n$ alors $|x|$ désigne le vecteur $|x| = (|x_i|)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$.

— On dit que $\lambda_0 \in \mathrm{sp}(A)$ est une *valeur propre dominante* de A si, pour tout $\lambda \in \mathrm{sp}(A) \setminus \{\lambda_0\}$, $|\lambda_0| > |\lambda|$.

On se propose de démontrer les deux propositions suivantes :

Proposition 1

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice strictement positive, alors $\rho(A)$ est une valeur propre dominante de A. Le sous-espace propre associé $\ker(A - \rho(A)I_n)$ est de dimension 1 et est dirigé par un vecteur propre strictement positif.

Proposition 2

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice strictement positive diagonalisable sur $\mathbb{C}$, si Y est un vecteur positif non nul de $\mathbb{R}^n$, alors $\left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^p Y$ converge, lorsque p tend vers $+\infty$, soit vers le vecteur nul, soit vers un vecteur directeur strictement positif de $\ker(A - \rho(A)I_n)$.

Dans toute cette partie II**,** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **est une matrice strictement positive.**

II.A –

Q 11. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \implies Ax \geqslant 0, \\ x \geqslant 0 \text{ et } x \neq 0 \implies Ax > 0. \end{cases}$$

Q 12. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $A^k > 0$.

Q 13. En déduire que $\rho(A) > 0$ puis montrer que $\rho\left(\frac{A}{\rho(A)}\right) = 1$.

Q 14. On suppose A diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Montrer que, si $\rho(A) < 1$ alors $\lim_{k\to+\infty} A^k = 0$.

Dans la suite du problème, on admettra que cette dernière implication est vraie même si la matrice A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

II.B – On suppose, dans les sous-parties II.B et II.C, que A est une matrice strictement positive vérifiant $\rho(A) = 1$.

On considère une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de A de module 1 et x un vecteur propre associé à λ. On se propose de démontrer que 1 est valeur propre de A.

Q 15. Montrer que $|x| \leqslant A|x|$.

Dans les questions qui suivent, on suppose que $|x| < A|x|$.

Q 16. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A^2|x| - A|x| > \varepsilon A|x|$.

Q 17. On pose $B = \dfrac{1}{1+\varepsilon} A$. Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, $B^k A|x| \geqslant A|x|$.

Q 18. Déterminer $\lim_{k\to+\infty} B^k$.

Q 19. Conclure.

II.C –

Q 20. Montrer que A admet un vecteur propre strictement positif associé à la valeur propre 1.

Q 21. Montrer que 1 est la seule valeur propre de module 1 de A.

On pourra admettre sans démonstration que si $z_1, z_2, ..., z_k$ sont des nombres complexes, tous non nuls, tels que $|z_1 + \dots + z_k| = |z_1| + \dots + |z_k|$, alors $\forall j \in [\![1, k]\!], \exists \lambda_j \in \mathbb{R}^+$ tel que $z_j = \lambda_j z_1$.

Q 22. Montrer que $\dim(\ker(A - I_n)) = 1$.

Q 23. En regroupant les résultats des sous-parties II.B et II.C, justifier qu'on a démontré la proposition 1.

II.D – Dans cette sous-partie, on se propose de démontrer la proposition 2.

On suppose donc que A est strictement positive et diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $Y_p = \left(\dfrac{A}{\rho(A)}\right)^p Y$.

Q 24. Soit $\lambda \in S = \mathrm{sp}(A) \setminus \{\rho(A)\}$. Soit $Y \in \ker(A - \lambda I_n)$. Montrer que la suite $(Y_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Q 25. Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur positif. Montrer que la suite $(Y_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le projeté de Y sur $E_{\rho(A)}(A)$ parallèlement à $\bigoplus_{\lambda\in S} E_\lambda(A)$. Vérifier que, s'il est non nul, ce dernier vecteur (le projeté de Y) est strictement positif.

Dans la suite du problème, on admet que la proposition 2 se généralise à toute matrice A strictement positive, même non diagonalisable et que, si $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur strictement positif, alors la suite (Y_p) converge vers un vecteur strictement positif dirigeant $E_{\rho(A)}(A)$.

II.E – Cette sous-partie permet de déterminer la valeur propre dominante $\rho(A)$ d'une matrice carrée A strictement positive de taille $n \geqslant 2$.

Q 26. Justifier que pour tout entier $k \geqslant 1$, A^k est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à une matrice triangulaire, dont on précisera les coefficients diagonaux.

Q 27. Montrer que $\lim_{k\to+\infty} \dfrac{\mathrm{tr}(A^{k+1})}{\mathrm{tr}(A^k)} = \rho(A)$.

III Une inégalité pour les chaînes de Markov

Dans toute cette partie III, N est un entier naturel non nul fixé et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans l'intervalle d'entiers $[\![0,N]\!]$.

On suppose que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall(i_1,i_2,\dots,i_{n+1})\in[\![0,N]\!]^{n+1}$,

$$P(X_{n+1}=i_{n+1}\mid X_n=i_n,X_{n-1}=i_{n-1},\dots,X_1=i_1)=P(X_{n+1}=i_{n+1}\mid X_n=i_n).$$

On suppose que pour tout $(i,j)\in[\![0,N]\!]^2$, $P(X_{n+1}=j\mid X_n=i)$ ne dépend pas de n et est strictement positif. On note alors $q_{i,j}=P(X_{n+1}=j\mid X_n=i)$.

On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une *chaine de Markov homogène* sur $[\![0,N]\!]$, de *matrice de transition Q*.

On attire l'attention sur les faits suivants :

— la numérotation des lignes et des colonnes de Q commence à 0 ;

— Q est une matrice carrée de taille $N+1$.

Dans toute la suite, pour $n\geqslant 1$ fixé, on pose Π_n la matrice colonne $\begin{pmatrix}P(X_n=0)\\ \vdots\\ P(X_n=N)\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{N+1,1}(\mathbb{R})$.

III.A – Justification de l'existence des lois $(\Pi_n)_{n\geqslant1}$

Q 28. Justifier que $\forall i\in[\![0,N]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{N}q_{i,j}=1$.

Q 29. Justifier que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\Pi_{n+1}=Q^\top\,\Pi_n$.

Q 30. En déduire que la loi de X_1 détermine entièrement les lois de toutes les variables aléatoires X_n, $n\in\mathbb{N}^*$.

Dans toute la suite, on considère une telle chaîne de Markov, et on pose

— $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}X_k$ pour $n\in\mathbb{N}^*$;

— $a_{i,j}(t)=q_{i,j}\mathrm{e}^{jt}$ pour tout $(i,j)\in[\![0,N]\!]^2$ et tout $t\in\mathbb{R}$;

— $A(t)=\big(a_{i,j}(t)\big)_{0\leqslant i\leqslant N,0\leqslant j\leqslant N}\in\mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$;

— $z_j(t)=P(X_1=j)\mathrm{e}^{jt}$ pour tout $j\in[\![0,N]\!]$ et tout $t\in\mathbb{R}$;

— $Z(t)=\begin{pmatrix}z_0(t)\\ \vdots\\ z_N(t)\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{N+1,1}(\mathbb{R})$.

III.B – Définition de la fonction de taux λ

Soient n un entier naturel non nul et t un réel fixé.

On admet que l'espérance de la variable aléatoire e^{tS_n} est égale

$$E(\mathrm{e}^{t\,S_n})=\sum_{j=0}^{N}Y_j^{(n)}(t)$$

où $Y^{(n)}(t)=\begin{pmatrix}Y_0^{(n)}(t)\\ \vdots\\ Y_N^{(n)}(t)\end{pmatrix}$ est le vecteur colonne défini par $Y^{(n)}(t)=\big(A(t)\big)^{n-1}\,Z(t)$.

Q 31. Justifier que $A(t)$ possède une valeur propre dominante $\gamma(t)>0$.

Q 32. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\big(E(\mathrm{e}^{t\,S_n})\big)}{n}=\lambda(t)$ où $\lambda(t)=\ln(\gamma(t))$.

III.C – Dans cette sous-partie, on étudie deux programmes écrits en langage Python. On suppose que la bibliothèque `numpy` a été importée à l'aide de l'instruction

```
import numpy as np
```

On rappelle que les opérations suivantes sont alors disponibles.

— `range(n)` renvoie la séquence des `n` premiers entiers ($0 \to n-1$).

— `np.array(u)` crée un nouveau tableau contenant les éléments de la séquence `u`. La taille et le type des éléments de ce tableau sont déduits du contenu de `u`.

— `a.shape` est un tuple donnant la taille du tableau `a` pour chacune de ses dimensions.

— `a.trace()` donne la trace du tableau `a`.

— `np.exp(a)` renvoie un tableau de même forme que le tableau `a` dont chaque terme est l'exponentielle du terme correspondant du tableau `a` (exponentielle terme à terme).

— `np.dot(a, b)` calcule le produit matriciel des tableaux `a` et `b` (sous réserve de compatibilité des dimensions).

— `x * a` renvoie un tableau de même forme que le tableau `a` correspondant au produit de chaque terme de `a` par le nombre `x`.

— `a * b` renvoie un tableau correspondant au produit terme à terme des deux tableaux `a` et `b`. Si `a` et `b` n'ont pas le même nombre de dimensions, le plus « petit » est virtuellement étendu afin de correspondre à la forme du plus « grand ». Par exemple si `a` est une matrice et `b` un vecteur, `b` doit avoir le même nombre de composantes que `a` a de lignes, il est alors virtuellement transformé en matrice avec le même nombre de colonnes que `a`, chaque colonne valant `b`.

Q 33. Écrire en langage Python une fonction `puiss2k` qui prend en argument une matrice carrée M et un entier naturel k et renvoie la matrice M^{2^k} en effectuant k produits matriciels. On pourra exploiter le fait que $M^{2^{k+1}} = M^{2^k} M^{2^k}$.

Q 34. Expliquer ce que fait la fonction Python `maxSp` définie par :

```
def maxSp(Q:np.ndarray, k:int, t:float) -> float:
    n = Q.shape[1]
    E = np.exp(t * np.array(range(n)))
    A = Q * E
    B = puiss2k(A, k)
    C = np.dot(A, B)
    return C.trace() / B.trace()
```

III.D – *Une majoration théorique et son interprétation*

On définit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda^*(x) = \sup\limits_{t \geqslant 0} (tx - \lambda(t))$.

On admet que cette borne supérieure existe et que la convergence de la suite de fonctions $\left(t \mapsto \dfrac{\ln(E(\mathrm{e}^{t\,S_n}))}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers la fonction $t \mapsto \ln(\gamma(t))$ démontrée à la question 32 est uniforme sur $\mathbb{R}^+$. On admet également dans toute la suite l'existence de $m = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} E(S_n)$ ainsi que les propriétés suivantes de λ^* :

$$\begin{cases} \lambda^*(x) = 0 & \text{pour tout } x \leqslant m, \\ \lambda^*(x) > 0 & \text{pour tout } x > m. \end{cases}$$

Dans toute la suite, ε désigne un réel strictement positif.

Q 35. Montrer qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n \geqslant n_0 \implies \ln(E(\mathrm{e}^{t\,S_n})) \leqslant n(\lambda(t) + \varepsilon)$$

Q 36. À l'aide de l'inégalité de Markov appliquée à la variable aléatoire $\mathrm{e}^{t\,S_n}$, montrer que pour $a > 1$, $n \geqslant n_0$ et $t \geqslant 0$,

$$P(S_n \geqslant nam) \leqslant \mathrm{e}^{-ntam} \mathrm{e}^{n(\lambda(t)+\varepsilon)}.$$

Q 37. En déduire que pour $n \geqslant n_0$,

$$P(S_n \geqslant nam) \leqslant \mathrm{e}^{-n(\lambda^*(am)-\varepsilon)}.$$

Q 38. Donner un sens concret à m en rapport avec le processus industriel étudié et interpréter l'inégalité précédente. On pourra établir un lien intuitif avec la loi des grands nombres.

III.E – Cette sous-partie constitue une application numérique et peut être traitée en admettant les résultats précédents.

On dispose de deux suites finies de réels $0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_K$ ($K \geqslant 2$) et $x_1 < x_2 < \cdots < x_L$ ($L \geqslant 2$). La formule de la question 32 appliquée en t_i avec n suffisamment grand permet d'estimer $\lambda(t_i)$ par une valeur approchée $\hat{\lambda}(t_i)$.

Q 39. Justifier que pour tout $i \in \{1, ..., L\}$,

$$\hat{\lambda}^*(x_i) = \max_{1 \leqslant j \leqslant K} (t_j x_i - \hat{\lambda}(t_j))$$

constitue une valeur approchée raisonnable de $\lambda^*(x_i)$.

Le tableau 1 donne ces valeurs pour $L = 20$.

x_i	4,50	4,55	4,60	4,65	4,70
$\hat{\lambda}^*(x_i)$	$4{,}1 \times 10^{-12}$	$4{,}1 \times 10^{-12}$	$4{,}1 \times 10^{-12}$	$4{,}1 \times 10^{-12}$	$4{,}1 \times 10^{-12}$
x_i	4,75	4,80	4,85	4,90	4,95
$\hat{\lambda}^*(x_i)$	$5{,}1 \times 10^{-4}$	$5{,}5 \times 10^{-3}$	$1{,}1 \times 10^{-2}$	$1{,}6 \times 10^{-2}$	$2{,}1 \times 10^{-2}$
x_i	5,00	5,05	5,10	5,15	5,20
$\hat{\lambda}^*(x_i)$	$2{,}6 \times 10^{-2}$	$3{,}1 \times 10^{-2}$	$3{,}6 \times 10^{-2}$	$4{,}1 \times 10^{-2}$	$4{,}6 \times 10^{-2}$
x_i	5,25	5,30	5,35	5,40	5,45
$\hat{\lambda}^*(x_i)$	$5{,}1 \times 10^{-2}$	$5{,}6 \times 10^{-2}$	$6{,}1 \times 10^{-2}$	$6{,}6 \times 10^{-2}$	$7{,}1 \times 10^{-2}$

Tableau 1

Q 40. À l'aide du tableau 1, donner un encadrement approximatif de la valeur de m et la valeur d'un réel $h > 0$ tel qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ vérifiant pour tout $n \geqslant n_0$,

$$P(S_n > 1,1 \times nm) \leqslant \mathrm{e}^{-nh}.$$

• • • FIN • • •

Mathématiques 1

Présentation du sujet

Le sujet a pour objectif principal l'étude de probabilités dans le cadre de la gestion d'erreurs d'un processus automatisé. Ce problème est constitué de trois grandes parties :

- une première partie où on étudie un cas particulier lié à la loi de Poisson ;
- une deuxième partie visant à démontrer partiellement le théorème de Perron-Frobenius ;
- une troisième partie qui propose un résultat intéressant sur les chaines de Markov.

L'étude des chaines de Markov a joué une place importante en mathématiques au vingtième siècle et apparait désormais régulièrement dans les exercices et problèmes en CPGE.

Une bonne maitrise du chapitre sur les probabilités et les variables aléatoires discrètes est indispensable pour traiter correctement ce sujet. Il est également attendu des candidats qu'ils maitrisent les rudiments de réduction des matrices (définition des éléments propres, théorèmes de diagonalisabilité ou trigonalisabilité). Enfin, quelques autres chapitres (suites numériques, séries de fonctions, calcul asymptotique...) entrent également en jeu.

Analyse globale des résultats

La première partie a été abordée presque entièrement par tous les candidats et certaines questions ont été très bien traitées. En revanche, le cours n'est pas toujours bien appris et certains résultats, pourtant très importants, ne sont pas cités correctement (propriétés d'une fonction génératrice, formule de Stirling, utilisation du théorème de la double limite...).

La deuxième partie a aussi été très largement traitée mais avec moins de succès. Beaucoup de très bonnes réponses ont été proposées, mais la rigueur mathématique était parfois absente dans les explications : par exemple, la notion de matrice positive (pourtant donnée dans l'énoncé) n'a pas toujours été bien comprise.

La troisième partie a été moins abordée, sans doute à cause de sa position en fin de problème, mais aussi car elle demandait d'avoir bien assimilé les résultats de la deuxième partie. Il est dommage que peu de candidats aient pu répondre de manière correcte aux questions d'informatique, qui étaient pourtant assez classiques.

Une majorité de copies est assez clairement présentée, avec des questions numérotées correctement, traitées dans l'ordre et des résultats encadrés. Ceux qui dérogent à ces règles de base font tout de suite mauvaise impression et prennent le risque d'être moins bien compris par les correcteurs.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Le jury souhaite insister sur un certain nombre de points qui ont souvent posé problèmes aux candidats.

- Les candidats doivent faire un effort de présentation des copies, numéroter les questions, les traiter dans l'ordre (quitte à laisser des blancs pour y revenir) et encadrer leurs résultats.
- L'utilisation des abréviations doit être limitée : si certaines (CNS, SSI...) sont très couramment utilisées, d'autres (FPT pour formule des probabilités totales...) le sont nettement moins.

- Un raisonnement doit être articulé avec des mots clés (considérons, or, donc, car, en effet), les hypothèses et les objectifs doivent être clairement identifiés.
- Lorsqu'une question propose de démontrer une formule qui est proposée, il ne s'agit pas simplement de recopier la dite formule : un minimum de justifications est attendu !
- Les questions doivent être lues avec plus d'attention : par exemple, la question « montrer qu'il existe un unique... » ne demande pas seulement de prouver une existence.
- Il est important de bien faire la différence entre une variable aléatoire et un évènement. Dans de trop nombreuses copies, on pouvait malheureusement lire des expressions du genre $\mathrm{P}(X)$ qui n'ont aucun sens.
- Quelques candidats éprouvent le besoin de redémontrer que la série génératrice d'une somme de deux variables indépendantes est le produit de leurs séries génératrices. C'est un résultat explicitement au programme qui peut être utilisé directement (sauf demande explicite du sujet).
- Dans la question 7, trop de candidats se contentent de majorer $u_k(x)$ sans envisager sa valeur absolue et ni mentionner le signe de cette quantité. Dans cette même question, on note de nombreuses confusions sur les notions et le vocabulaire relatifs aux séries de fonctions : par exemple, on peut lire des phrases comme « la série $\sum u_k/n$ converge normalement sur $[0,+\infty[$ » ou encore « la série u_k converge normalement ».
- Dans la question 8, il convient de noter que la série $\sum \left(\dfrac{1}{1+kx}\right)^k$ n'est pas géométrique dès que x est non nul.
- Dans la question 13, trop de candidats semblent confondre les assertions « admettre 0 pour seule valeur propre » et « admettre 0 pour valeur propre ». De même, il faut bien se rappeler que si P est un polynôme annulateur d'une matrice A, on a en général, seulement l'inclusion du spectre de A dans l'ensemble des racines de P.
- Dans la question 24, de très nombreux candidats écrivent des inégalités sur des valeurs propres qui sont pourtant à priori des nombres complexes. L'énoncé prenait pourtant bien la peine de préciser que les matrices considérées, même si à coefficients réels, n'étaient supposées diagonalisables que sur $\mathbb{C}$.
- Dans la question 36, l'hypothèse cruciale de positivité de la variable aléatoire à laquelle on applique l'inégalité de Markov est trop souvent omise.

Conclusion

Le sujet est plutôt long mais la progressivité du texte et la diversité des chapitres mathématiques nécessaires (probabilités, suites, séries de fonctions, réduction...), ont a permis à tous les candidats de traiter de nombreuses questions et de mettre en évidence leurs compétences. Quelques lacunes sur des notions de base ont malheureusement aussi été repérées.

De nombreux candidats ont su montrer leur maitrise du langage mathématique en général et, plus spécifiquement, des points qui étaient nécessaires pour aborder les diverses parties de ce problème : le langage des probabilités, l'utilisation des séries génératrices, la formule des probabilités totales ; en analyse, les théorèmes centraux sur les séries de fonctions, des éléments d'analyse asymptotique ; en algèbre, la définition du produit matriciel, la notion de polynôme annulateur et le théorème de Cayley-Hamilton, la similitude matricielle, la notion de diagonalisabilité. Quelques candidats ont abordé avec succès les questions plus difficiles qui parsemaient le sujet et les correcteurs tiennent à les en féliciter.

Les correcteurs encouragent vivement les candidats à utiliser un brouillon et à ne pas commencer systématiquement la rédaction aussitôt l'énoncé lu. De nombreuses erreurs grossières pourraient ainsi être évitées. De même, quelques exemples simples vus tout au long de l'année donneraient aux candidats des idées élémentaires permettant de comprendre de nombreuses questions et d'en mesurer la difficulté.

Mathématiques 2

PSI

2020

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrice autorisée

Les fonctions de Lambert

Objectifs

L'objet de ce problème est l'étude de différentes propriétés des fonctions de Lambert ainsi que leur application en probabilités.

Dépendance des parties

Les fonctions V et W définies dans la partie I sont utilisées dans les parties II, III et IV. Les parties II, III et IV sont indépendantes les unes des autres.

Notations

Pour des entiers k et n avec $0 \leqslant k \leqslant n$, le coefficient binomial « k parmi n » est noté $\displaystyle\binom{n}{k}$.

Lorsque $k \leqslant n$, $[\![k, n]\!]$ représente l'ensemble des nombres entiers compris, au sens large, entre k et n.

I Fonctions de Lambert

Dans cette partie, on définit les fonctions de Lambert et on étudie certaines de leurs propriétés. On considère, dans toute cette partie, l'application

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\mathrm{e}^x \end{array} \right.$$

Q 1. Justifier que l'application f réalise une bijection de l'intervalle $[-1, +\infty[$ sur l'intervalle $[-\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$.

Dans la suite du sujet, la réciproque de cette bijection est notée W. On rappelle que ceci signifie que, pour tout réel $x \geqslant -\mathrm{e}^{-1}$, $W(x)$ est l'unique solution de l'équation $f(t) = x$ (équation d'inconnue $t \in [-1, +\infty[$).

Q 2. Justifier que W est continue sur $[-\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$ et est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$.

Q 3. Expliciter $W(0)$ et $W'(0)$.

Q 4. Déterminer un équivalent de $W(x)$ lorsque $x \to 0$ ainsi qu'un équivalent de $W(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Q 5. Tracer, sur le même dessin, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_W$ représentatives des fonctions f et W. Préciser les tangentes aux deux courbes au point d'abscisse 0 ainsi que la tangente à $\mathcal{C}_W$ au point d'abscisse $-\mathrm{e}^{-1}$.

Q 6. Pour quelles valeurs du paramètre réel α la fonction $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est-elle intégrable sur $]0, 1]$?

Q 7. Pour quelles valeurs du paramètre réel α la fonction $x \mapsto x^\alpha W(x)$ est-elle intégrable sur $[1, +\infty[$?

Q 8. Démontrer que l'application f réalise une bijection de l'intervalle $]-\infty, -1]$ sur l'intervalle $[-\mathrm{e}^{-1}, 0[$.

Dans la suite du sujet, la réciproque de cette bijection est notée V.

Q 9. Pour un paramètre réel m, on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$$x\mathrm{e}^x = m \tag{I.1}$$

Déterminer, en fonction de m, le nombre de solutions de (I.1). Expliciter les solutions éventuelles à l'aide des fonctions V et W.

Q 10. Pour un paramètre réel m, on considère l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$$x\mathrm{e}^x \leqslant m \tag{I.2}$$

En utilisant les fonctions V et W, déterminer, suivant les valeurs de m, les solutions de (I.2). Illustrer graphiquement les différents cas.

Q 11. Pour des paramètres réels non nuls a et b, on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{e}^{ax} + bx = 0 \tag{I.3}$$

Déterminer, suivant les valeurs de a et b, le nombre de solutions de (I.3). Expliciter les solutions éventuelles à l'aide des fonctions V et W.

II Probabilités

On étudie dans cette partie deux situations dont la résolution fait intervenir les fonctions V et W définies dans la partie précédente. Les variables aléatoires considérées dans cette partie sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. L'espérance et la variance d'une variable aléatoire X sont notées, sous réserve d'existence, respectivement $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

II.A – Première situation

Pour fidéliser sa clientèle, un commerçant organise une tombola permettant de gagner différents lots. Chaque client qui entre dans le magasin tire un billet de tombola. Chaque billet permet de gagner un lot avec la probabilité $p \in]0,1[$. On suppose que les tirages sont indépendants et on admet que le nombre N de billets distribués aux clients au cours d'une journée est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On note X le nombre de billets gagnants tirés au cours d'une journée et on admet que X est également une variable aléatoire.

Pour que l'opération soit rentable, le commerçant souhaite que la probabilité de gagner au moins deux lots durant la même journée soit faible. On considère donc un réel $\alpha \in]0,1[$ et on souhaite réaliser la condition

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2) \leqslant 1 - \alpha. \qquad \text{(II.1)}$$

Cependant, pour que l'opération intéresse les clients, le commerçant souhaite également que p soit le plus grand possible, tout en réalisant la condition (II.1).

Q 12. Démontrer que X suit une loi de Poisson de paramètre λp. Donner l'espérance et la variance de X.

Q 13. En utilisant l'inégalité de Markov, démontrer que si $p \leqslant 2\dfrac{1-\alpha}{\lambda}$, alors la condition (II.1) est satisfaite.

Q 14. On pose $x = -(\lambda p + 1)$. Démontrer que la condition (II.1) est équivalente à la condition

$$x\mathrm{e}^x \leqslant -\alpha \mathrm{e}^{-1}.$$

Q 15. En utilisant l'une des fonctions V et W (définies dans la partie I) et la question 10, discuter selon la position de λ par rapport à $-1 - V(-\alpha\mathrm{e}^{-1})$ l'existence d'un plus grand réel $p \in]0,1[$ satisfaisant la condition (II.1).

II.B – Deuxième situation

Un message constitué d'une suite de bits est transmis sur un canal. Cependant, ce canal n'est pas fiable : chaque bit risque d'être inversé, indépendamment des autres, avec la probabilité $1 - p \in]0,1[$. Pour fiabiliser la transmission, on découpe le message et on transmet des blocs de r bits. Chaque bloc comprend à la fois des bits du message d'origine et des bits supplémentaires qui permettent de détecter et corriger *une* erreur. On note X le nombre d'inversions survenues lors de la transmission d'un bloc de r bits et on admet que X est une variable aléatoire. Pour que la transmission soit suffisamment fiable, on souhaite que la probabilité qu'il y ait au moins deux erreurs dans un même paquet soit faible. Plus précisément, on considère $\alpha \in]0,1[$ et on veut réaliser la condition

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2) \leqslant 1 - \alpha. \qquad \text{(II.2)}$$

Pour que le codage soit efficace, on souhaite de plus que r soit le plus grand possible, tout en réalisant la condition (II.2).

Q 16. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Q 17. En utilisant l'inégalité de Markov, démontrer que si $r \leqslant 2\dfrac{1-\alpha}{1-p}$, alors la condition (II.2) est satisfaite.

Q 18. On pose $a = \dfrac{p\ln(p)}{p-1}$ et $x = r\ln(p) - a$. Démontrer que la condition (II.2) est équivalente à la condition

$$x\mathrm{e}^x \leqslant -\alpha a \mathrm{e}^{-a}.$$

Q 19. En utilisant l'une des fonctions V et W (définies dans la partie I) et la question 10, étudier l'existence d'un plus grand entier naturel r satisfaisant la condition (II.2).

Q 20. Lorsqu'il existe, exprimer cet entier en fonction de p, α et a à l'aide d'une des fonctions V ou W.

III Développement en série entière

Le but de cette partie est d'établir que la fonction W définie dans la partie I est développable en série entière et de préciser son développement ainsi que son rayon de convergence. Pour cela, on commence par établir un résultat de nature algébrique.

III.A – Le théorème binomial d'Abel

On considère dans cette partie un entier naturel n ainsi qu'un nombre complexe a. On définit une famille de polynômes $(A_0, A_1, ..., A_n)$ en posant

$$A_0 = 1 \qquad \text{et, pour tout } k \in [\![1, n]\!], \quad A_k = \frac{1}{k!} X(X - ka)^{k-1}.$$

On note $\mathbb{C}_n[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes et de degré inférieur ou égal à n.

Q 21. Démontrer que la famille $(A_0, ..., A_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Q 22. Démontrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $A_k'(X) = A_{k-1}(X - a)$.

Q 23. En déduire, pour j et k éléments de $[\![0, n]\!]$, la valeur de $A_k^{(j)}(ja)$. On distinguera suivant que $j < k$, $j = k$ ou $j > k$.

Soit P un élément de $\mathbb{C}_n[X]$ et soient $\alpha_0, ..., \alpha_n$ des nombres complexes tels que

$$P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A_k.$$

Q 24. Démontrer que, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $\alpha_j = P^{(j)}(ja)$.

Q 25. En déduire l'identité binomiale d'Abel :

$$\forall (a, x, y) \in \mathbb{C}^3, \qquad (x + y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x(x - ka)^{k-1}(y + ka)^{n-k}.$$

Q 26. Établir la relation,

$$\forall (a, y) \in \mathbb{C}^2, \qquad ny^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-ka)^{k-1}(y + ka)^{n-k}.$$

III.B – Développement en série entière de la fonction W

On définit une suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ en posant,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n = \frac{(-n)^{n-1}}{n!}.$$

On définit, lorsque c'est possible, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

Q 27. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geqslant 1} a_n x^n$.

Q 28. Justifier que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, exprimer $S^{(n)}(0)$ en fonction de n.

Q 29. Démontrer que la fonction S est définie et continue sur $[-R, R]$.

Q 30. Démontrer que,

$$\forall x \in]-R, R[, \qquad x(1 + S(x))S'(x) = S(x).$$

On pourra utiliser le résultat de la question 26.

On considère la fonction $h : \left| \begin{array}{ccc}]-R, R[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & S(x)\mathrm{e}^{S(x)} \end{array} \right.$

Q 31. Démontrer que h est solution sur $]-R, R[$ de l'équation différentielle $xy' - y = 0$.

Q 32. Résoudre l'équation différentielle $xy' - y = 0$ sur chacun des intervalles $]0, R[$, $]-R, 0[$ puis sur l'intervalle $]-R, R[$.

Q 33. En déduire que,

$$\forall x \in]-R, R[, \qquad S(x) = W(x).$$

Q 34. Ce résultat reste-t-il vrai sur $[-R, R]$?

IV Approximation de W

On définit dans cette partie une suite de fonctions $(w_n)_{n\geqslant 0}$ et on étudie sa convergence vers la fonction W définie dans la partie I.

Pour tout réel positif x, on considère la fonction ϕ_x définie par

$$\phi_x : \left| \begin{array}{lcc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & x\exp(-x\exp(-t)) \end{array} \right.$$

et on définit, sur $\mathbb{R}^+$, une suite de fonctions $(w_n)_{n\geqslant 0}$ par,

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad \begin{cases} w_0(x) = 1 \\ w_{n+1}(x) = \phi_x(w_n(x)) \end{cases}$$

Q 35. Démontrer que, pour tout réel positif x, $W(x)$ est un point fixe de ϕ_x, c'est-à-dire une solution de l'équation $\phi_x(t) = t$.

Q 36. Démontrer que, pour tout réel positif x, la fonction ϕ_x est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad 0 \leqslant \phi_x'(t) \leqslant \frac{x}{\mathrm{e}}.$$

Q 37. En déduire que

$$\forall x \in [0, \mathrm{e}], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad |w_n(x) - W(x)| \leqslant \left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^n |1 - W(x)|\,.$$

Q 38. Pour tout réel $a \in]0, \mathrm{e}[$, justifier que la suite de fonctions (w_n) converge uniformément sur $[0, a]$ vers la fonction W.

Q 39. La suite de fonctions (w_n) converge-t-elle uniformément vers W sur $[0, \mathrm{e}]$?

• • • FIN • • •

Mathématiques 2

Présentation du sujet

Ce problème s'intéresse à des fonctions ne s'exprimant pas à l'aide des fonctions usuelles, définies comme réciproques sur certains intervalles de la fonction $x \mapsto x\mathrm{e}^x$. On établit diverses propriétés de ces fonctions, en particulier le fait que l'une d'elle est développable en série entière au voisinage de zéro. Deux applications en probabilité sont mises en avant.

Ce sujet, d'une longueur très raisonnable, comporte plusieurs parties assez indépendantes et permet de contrôler les connaissances des candidats dans des domaines variés d'analyse et de probabilité de première et seconde année.

Il n'encourage cependant pas le grappillage, chaque question nécessitant soit une bonne compréhension du contexte soit une vraie connaissance du cours. Quelques questions plus difficiles n'ont été comprises que par les meilleurs candidats.

Analyse globale des résultats

Les candidats ont su exploiter le sujet pour montrer leurs compétences en choisissant les parties les plus à leurs convenances et ne sont jamais restés bloqués sur un point. La plupart des questions est assez simple et a permis de bien classer les candidats en fonction de leur compréhension de la question, de la précision des connaissances et de la rigueur de la réponse.

Le jury a été agréablement surpris par la gestion de certains calculs, par le nombre de candidats ayant su obtenir l'identité d'Abel et son corollaire et globalement par les connaissances en probabilité. En revanche très peu de candidats sont capables de résoudre une équation différentielle linéaire aussi simple que $xy' = y$

Par ailleurs le jury a moins apprécié la présentation des copies, l'écriture et l'abus d'abréviations mystérieuses et, bien pire encore, les contre vérités flagrantes, surtout accompagnées de « d'après le cours », et les escroqueries.

Les meilleurs candidats sont ceux qui prennent le temps de comprendre chaque question et d'argumenter chaque réponse.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Le cours rarement utilisé avec assez de précision

En Q1 et Q8 entre continuité, stricte monotonie (justifiée) et limite en l'infini il y a souvent au moins un argument manquant.

Le résultat concernant la dérivabilité de la réciproque n'est pas connu.

En Q12 et 16 il était indispensable d'utiliser l'indépendance et, si tous les candidats connaissent l'espérance des lois usuelles, la variance a moins de succès.

En Q13 et 17 avant d'appliquer l'inégalité de Markov il fallait préciser positivité (et intégrabilité).

La Q28 a donné lieu à moins de 40 % de bonne réponses pour la valeur des dérivés en 0.

En Q30 pour effectuer un produit de Cauchy il est souhaitable de regarder le rayon des deux séries entières et, lorsque le terme constant de l'une est nul, de s'en apercevoir.

Des questions pas toujours assez comprises

En Q11 les paramètres a et b sont non nuls, inutile de discuter ces cas particuliers ; le sujet demande explicitement d'utiliser les fonctions V et W.

En Q22 la formule $A'_k(X) = A_{k-1}(X-a)$ a souvent été mal comprise, le membre de droite étant vu comme un produit au lieu d'une composition. Un argument de degré rendait cette interprétation impossible.

Le cours doit être cité parfaitement, mais il n'est pas utile de le redémontrer (sauf mention explicite d'une question de cours). De nombreux candidats ont perdu du temps en déterminant espérance et variance de loi de Poisson, binomiale, ou des points en donnant une justification complètement erronée de la régularité d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence

Manque de soin, incohérence

En Q3 la moitié des réponses sont fausses, il suffisait pourtant de connaitre la dérivée d'une réciproque, et plus grave la contradiction avec le graphe de Q5 n'est jamais signalée.

En Q5 moins de 40 % des candidats proposent un graphe soigné avec des tangentes mises en évidence. Rappelons qu'une verticale ne coupe jamais le graphe d'une fonction en plus d'un point.

En Q6 des erreurs de signe pour l'étude des intégrales de Riemann, la continuité sur $]0, 1]$ est rarement rappelée.

De nombreuses compositions d'équivalents, d'erreurs dans l'ordre des développements limité.

En Q21 étourderie fréquente sur la dimension.

En III.B la présence d'un $(-1)^n$ ne suffit pas pour appliquer le critère spécial.

En Q38 seule une minorité de candidats semble avoir compris la différence entre convergence simple et uniforme et très peu majorent proprement $|1 - W(x)|$ par une constante.

Oubli fréquent des cas particuliers : cas $m = \mathrm{e}^{-1}$ pour lequel les deux solutions sont confondues, dérivation de $(X - a)^{k-1}$ pour $k = 1$, premiers termes de la somme pour le calcul de la loi de X...

Insistons enfin sur la question 32. La moitié de ceux qui traitent la question se trompe dans la résolution de $xy' = y$ sur un intervalle ne contenant pas 0. Les erreurs de signe se corrigeaient facilement si le candidat prenait le temps de vérifier que sa solution est bien solution, et obtenir un ensemble de solutions qui n'est pas une droite vectorielle est vraiment inquiétant. Quant au raccordement des solutions il n'est correctement traité que dans 10 % des copies.

Conclusion

Le jury invite les futurs candidats à mettre avant tout l'accent sur l'apprentissage du cours. Les exercices de base ne sont pas à négliger, mais ne doivent pas être confondus avec le cours : il est bon de savoir quand les intégrales de Bertrand convergent ou que $(1 + 1/n)^n$ ne converge pas vers 1, mais cela ne dispense pas de savoir le démontrer.

Nous les engageons à privilégier la qualité sur la quantité, dans la présentation et surtout dans la précision de l'argumentation.

Les candidats qui avancent dans un sujet de manière presque linéaire, en donnant tous les arguments importants, qui signale honnêtement les manques ou les incohérences de leurs propositions ont toujours d'excellentes notes.