

Proposition de sujets pour les épreuves de Mathématiques I et II

1 Déroulement des deux épreuves de mathématiques

Il y a deux épreuves de mathématiques à la partie orale du concours de l'École Navale dans la filière MP. De format et de nature différentes, elles sont complémentaires et doivent permettre aux candidats de montrer qu'ils possèdent une palette de qualités assez étendue. Pour schématiser, on peut dire que la première épreuve a pour but de révéler leur capacité de gestion du temps court et la deuxième, celle du temps long. Naturellement, dans les deux épreuves, l'interrogation peut confronter le candidat à des situations inattendues qui doivent l'amener à faire la preuve de sa capacité à organiser sa présentation et à gérer son stress.

Nous proposons ci-dessous deux exemples types de ces épreuves, dans le cadre des nouveaux programmes de la filière MP.

Ces deux épreuves, avec leurs spécificités, ont pour but de découvrir chez le candidat quelques compétences d'ordre scientifique parmi les suivantes :

- découverte et analyse d'un sujet avec modélisation personnalisée
- engagement dans une recherche avec raisonnement et argumentation
- mise en place d'une stratégie de calculs et de déroulement de l'exposé avec communication orale
- représentation de l'analyse et des résultats sous-jacents

D'autres compétences, plus humaines et en adéquation avec l'attendu de l'École Navale seront aussi recherchées :

- la réactivité face aux questionnements
- la capacité d'adaptation
- la résistance au stress

2 Un exemple de sujet pour l'épreuve Mathématiques I

2.1 Introduction

L'épreuve de Mathématiques 1 dure 30 minutes et ne comporte pas de temps de préparation. Il s'agit ici de voir les réactions immédiates suscitées par un sujet qui le plus souvent utilise presque uniquement des concepts centraux du programme. Le candidat est ainsi amené à restituer un certain nombre de ces concepts et à les mettre en œuvre dans le contexte proposé, dans une stratégie de démonstration à assez court terme qui permet rapidement de différencier ceux dont la compréhension repose sur des bases fermes de ceux qui, au contraire, n'ont que des notions vagues en tête.

La nouveauté la plus radicale des nouveaux programmes de classes préparatoires en mathématiques est l'introduction de rudiments de probabilités pour la première fois de l'histoire de ces classes. Nous avons

donc choisi un sujet dans ce domaine pour ce sujet "zéro". Le but du problème est de prouver le caractère poissonnien de la fonction de comptage d'un processus de Poisson. L'exercice proposé porte donc sur des notions probabilistes, mais veut également donner l'occasion aux candidats d'utiliser une des plus importantes notions du programme d'analyse, les séries entières.

2.2 Énoncé commenté de l'exercice

On étudie les temps de pannes successifs d'une machine. Pour tout réel t positif, la variable aléatoire N_t à valeurs entières représente le nombre de pannes qui se produisent dans l'intervalle $[0, t]$. On considère que le système est réparé immédiatement après chaque panne.

On suppose qu'on a les quatre propriétés suivantes

- (i) $N_0 = 0$ et $0 < \mathbf{P}(N_t = 0) < 1$ pour tout $t > 0$.
- (ii) Pour tous réels t_0, t_1, \dots, t_n tels que $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ les variables

$$N_{t_0}, N_{t_1} - N_{t_0}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$$

sont mutuellement indépendantes (accroissements indépendants)

- (iii) Pour tous réels s et t tels que $0 < s < t$, $N_t - N_s$ suit la même loi que N_{t-s} (accroissements stationnaires)

- (iv) $\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{\mathbf{P}(N_h > 1)}{h} = 0$

Pour $u \in \mathbb{R}_+$, on note G_u la fonction génératrice de N_u .

- 1) Montrer que, pour tous réels u et v positifs ou nuls, et pour tout réel s tel que $0 \leq s \leq 1$, on a

$$G_{u+v}(s) = G_u(s)G_v(s)$$

*Le candidat doit d'abord se familiariser avec les quatre propriétés probabilistes attachées aux variables N_t . Elles ne présentent pas de difficulté particulière mais leur assimilation rapide, ainsi qu'une bonne connaissance de la notion de fonction génératrice conditionne la réponse à la première question. On mesure ici la réactivité face à plusieurs notions introduites et les capacités de découverte et d'analyse du candidat (**représenter**)*

- 2) On fixe s tel que $0 \leq s \leq 1$.

Montrer que pour tout réel positif u , $G_u(s) = e^{-u\theta(s)}$ où on a posé $\theta(s) = -\ln G_1(s)$.

*Cette question est assez classique, et il est probable que des candidats l'affirmeront comme un résultat de cours (même s'il ne l'est pas au sens strict) et cela peut être alors l'occasion de les interroger sur la méthode de démonstration suivie (**raisonner et argumenter**). Pour les autres, la mise à l'étrier par la suggestion de commencer par voir ce qui se passe quand s est un entier peut permettre de tester leur réactivité pour poursuivre le raisonnement. On jugera ici les capacités d'adaptation du candidat, face à un questionnement (gestion du stress engendré suite à une question peut-être inattendue).*

3) Montrer que pour tout $s \in [0, 1]$, $\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbf{P}(N_h = k)(s^k - 1)}{h} = 0$

4) En déduire qu'il existe $\alpha \geq 0$ tel que $\alpha = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{\mathbf{P}(N_h = 1)}{h}$ et que pour tout $s \in [0, 1]$, $\theta(s) = \alpha(1 - s)$

*Ces deux questions ne sont pas difficiles mais nécessitent cependant de la lucidité quant à la mise en œuvre des hypothèses et la manipulation de la série entière (il est notamment souhaitable que le candidat fasse spontanément mention du fait que le rayon de convergence de la série entière est supérieur ou égal à 1 pour justifier les transformations qu'il lui fera subir. On analyse dans cette question, la mise en place d'une stratégie de calcul, l'engagement dans une recherche avec raisonnement et argumentation (**s'engager dans une recherche et mettre en œuvre une stratégie**)).*

5) Déduire que pour tout $u > 0$, la variable aléatoire N_u suit la loi de Poisson de paramètre αu .

*Cette question demande seulement au candidat de reconnaître le cas classique de la fonction génératrice d'une loi de Poisson (**modéliser**). C'est l'occasion d'étudier la communication à l'oral, le cours étant un moment privilégié pour obliger le candidat à s'exprimer (**communiquer à l'écrit et à l'oral**)).*

6) Comment peut-on interpréter la condition (iv) ?

Enfin ici un petit effort de recul et d'imagination est attendu du candidat pour exprimer que la condition (iv) traduit la rareté d'avoir (au moins) deux pannes très proches l'une de l'autre. Seuls les meilleurs atteindront cette question et auront encore le pouvoir d'analyse attendu. On jugera ici leur pugnacité à conserver suffisamment de réflexion en cette fin de sujet.

3 Un exemple de sujet pour l'épreuve Mathématiques II

3.1 Introduction

L'épreuve de Mathématiques 2 dure 40 minutes et comporte, elle, une préparation. Elle permet de juger des capacités du candidat à analyser un texte introduisant parfois des notions nouvelles (en accord avec le programme de MP-MPSI naturellement) et à approfondir certains concepts. La gestion plus large du temps permet d'apprécier le recul du candidat par rapport au travail effectué, car la préparation permet un développé dynamique plus soutenu et des capacités de synthèse. On distinguera ainsi les candidats sachant faire le point sur les résultats obtenus, et qui réussissent à les exploiter pour aller plus loin.

On introduit dans ce sujet une notion fondamentale de la théorie des graphes : les matrices d'adjacence. Celles-ci sont au programme de deuxième année de l'informatique pour tous, mais on étudie ici une interprétation du produit matriciel (question 6) qui ne fait pas directement partie du programme.

Le sujet se veut très progressif, pour mettre en confiance les candidats dès les premières questions. La notion introduite permet par ailleurs d'orienter l'interrogation vers d'autres domaines (comme par exemple la recherche probabiliste de cycles dans un graphe), selon le souhait de l'interrogateur de tester d'autres zones du programme tout en restant dans la philosophie du sujet.

3.2 Énoncé commenté de l'exercice

Dans cet exercice on fixe n un entier supérieur ou égal à 3.

Un **graphe** est un ensemble G , de paires $\{s, s'\}$ d'éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

On appelle n -**cycle** le graphe $G = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\}$.

Enfin, si G est un graphe, la **matrice d'adjacence** de G est la matrice $M_G = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ de taille n telle que :

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{i, j\} \in G \\ 0 & \text{si } \{i, j\} \notin G \end{cases}$$

1) Pour le graphe G_0 (avec $n = 4$) représenté ci-dessous, donner la matrice d'adjacence M_{G_0} notée M_0 par commodité.

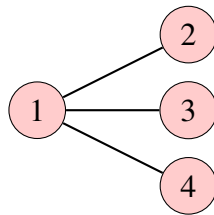


FIGURE 1 – Graphe G_0

Cette question permet d'emblée de juger les capacités du candidat à s'appropriier des nouvelles notions. On juge la capacité de découverte et d'analyse d'un sujet (s'engager dans une recherche et mettre en œuvre une stratégie).

2) Étudier les éléments propres de M_0 .

*Après la mise en place de la notion de graphe non orienté, on étudie un exemple numérique avec recherche d'éléments propres. Cette deuxième question peut être résolue à la fois de façon purement calculatoire, mais aussi pratiquement «sans la craie» et on jugera ici les qualités de recul du candidat selon la méthode employée (**mettre en œuvre une stratégie**). Elle permet avec questions de l'interrogateur, d'analyser les capacités de raisonnement et d'argumentation du candidat (**raisonner et argumenter**). C'est aussi sa réactivité face au questionnement qui est attendue ici. Enfin, selon la réaction du candidat, on analysera par des questions plus spécifiques ou posées différemment sa gestion du stress. Cette question est déjà l'occasion de tester les connaissances de cours sur les complexes et en particulier les racines de l'unité, ainsi que sur la diagonalisation, point d'orgue du programme d'algèbre linéaire. Ce sont les capacités de communication qui sont en grande partie mesurées ici (**communiquer à l'écrit et à l'oral**). Finalement, cette question bien que classique et abordable par tous les candidats, est l'une des questions fondamentales qui permet de juger de toutes ces compétences.*

3) Justifier rapidement que la matrice d'adjacence du n -cycle est :

$$M_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La réponse étant donnée, on n'attend pas de grands discours ici. Cette réponse donnée permet au candidat de continuer sa préparation (originalité de l'épreuve de mathématiques 2) même s'il n'a pas su répondre à la question.

4) On note $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$ une des racines n -èmes de l'unité. Justifier que le vecteur $C_k = \begin{pmatrix} \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ \omega^{nk} \end{pmatrix}$ est

vecteur propre de M_G associé à une valeur propre complexe que l'on déterminera.

Ici on juge quelques compétences de calcul, mais surtout la manière de les mener !

5) Justifier le caractère diagonalisable sur \mathbb{R} de toute matrice d'adjacence et proposer une méthode de recherche des éléments propres réels de M_G dans le cas du n -cycle.

Cette question permet de pousser les capacités d'analyse, de recul et de calcul avec une étude de diagonalisation plus difficile utilisant d'autres outils (si possible) que les questions précédentes (s'engager dans une recherche et mettre en œuvre une stratégie).

6) Montrer que pour $p \in \mathbb{N}^*$, et $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, le coefficient (i, j) de M_G^p est non nul si et seulement si on peut trouver une succession de sommets s_1, s_2, \dots, s_{p+1} tels que :

$$s_1 = i \quad s_{p+1} = j \quad \{s_k, s_{k+1}\} \in G \text{ si } 1 \leq k \leq p$$

Que représente alors ce coefficient ?

7) Quel peut être l'intérêt de diagonaliser M_G ?

*La question 6 donne une interprétation hors du champ de l'algèbre linéaire du produit matriciel. Cette question (et la huitième) permet de juger des capacités de recul du candidat et lui donne l'occasion (question 7) d'expliquer l'intérêt mathématique de la résolution des questions 2 et 5 (**raisonner et argumenter**). On juge ici les capacités d'analyse et de représentation d'un modèle a priori inconnu (**représenter et modéliser**).*

8) Proposer en python une fonction qui permette de déterminer le plus court chemin éventuel reliant deux sommets donnés d'un graphe.

*Cette dernière question, très ouverte et plutôt difficile, orientée informatique pour tous, permet de juger pour les meilleurs candidats, les qualités de synthèse et de modélisation personnalisée (**représenter et modéliser**).*